EXPLORACIÓN DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Objetivo: el objetivo de esta exploración es determinar el comportamiento final de la función racional a medida que los valores de *x* se acercan al infinito.

Antecedentes: recordarás que en aritmética un cociente es el resultado de la división de un número entre otro.

Por ejemplo, 2 es el cociente de $\frac{6}{3}$.

Cuando se trata de funciones, una función cociente es un término general para una función que está compuesta por una función dividida por otra.

Por ejemplo $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. En este caso f se define como la función seno, $\sin(x)$, dividida por la función lineal, x.

Una función racional es simplemente un tipo específico de función cociente que divide un polinomio entre otro. Definimos las funciones racionales como $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Por ejemplo, $f(x) = \frac{x^2+6x+1}{x^3-9}$ es una función racional ya que el numerador y el denominador son polinomios. El numerador es un polinomio cuadrático y el denominador es un polinomio cúbico.

Exploración:

Situación 1: Deja que f sea una función definida como $f(x) = \frac{1}{x^2}$

A. ¿Cuál es el grado del polinomio en el numerador? ¿Cuál es el grado del polinomio en el denominador?

B. Utiliza tu calculadora para rellenar la siguiente tabla:

x	$f(x)$
1	
10	
50	
100	
500	
1000	
10000	

C. ¿Qué notas en los valores de $f(x)$ a medida que los valores de $x$se hacen más grandes? ¿Los resultados son cada vez mayores o menores?

D. Si crees que los valores son cada vez mayores, ¿hacia dónde diverge la función? Si crees que los valores son cada vez más pequeños, ¿hacia dónde crees que convergen los valores?

E. Determina el límite, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} =$ ________. ¿Hacia dónde crees que tenderá la función cuando x se acerca al infinito negativo? Utiliza tu calculadora para encontrar $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$

Situación 2: Deja que g sea una función definida como $g(x) = \frac{x^3-1}{x+5}$

A. ¿Cuál es el grado del polinomio en el numerador? ¿Cuál es el grado del polinomio en el denominador?

B. Utiliza tu calculadora para rellenar la siguiente tabla:

x	$g(x)$
1	
10	
50	
100	
500	
1000	
10000	

C. ¿Qué observas en los valores de $g(x)$ a medida que aumenta el valor de x? ¿Los resultados son cada vez mayores o menores?

D. Si crees que los valores son cada vez mayores, ¿hacia dónde diverge la función? Si crees que los valores son cada vez más pequeños, ¿hacia dónde crees que convergen los valores?

E. ¿En qué se diferencia este resultado de la situación anterior?

F. ¿Notas alguna diferencia en el grado de los polinomios del numerador y del denominador?

G. Determina el límite, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x+5} =$ ________. ¿Hacia dónde crees que tenderá la función cuando x se acerca al infinito negativo? Utiliza tu calculadora para encontrar $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x+5}$

Situación 3: Deja que h se defina como la función $h(x) = \frac{3x^2-6x+1}{4-2x^2}$

A. ¿Cuál es el grado del polinomio en el numerador? ¿Cuál es el grado del polinomio en el denominador?

B. Utiliza tu calculadora para rellenar la siguiente tabla:

x	$h(x)$
1	
10	
50	
100	
500	
1000	
10000	

C. ¿Qué notas en los valores de $h(x)$ a medida que los valores de $x$se hacen más grandes? ¿Los resultados son cada vez mayores o menores?

D. Si crees que los valores son cada vez mayores, ¿hacia dónde diverge la función? Si crees que los valores son cada vez más pequeños, ¿hacia dónde crees que convergen los valores?

E. ¿En qué se diferencia este resultado de las situaciones uno y dos? ¿Hay similitudes?

F. ¿Notas alguna diferencia en los grados de los polinomios del numerador y del denominador?

G. ¿Qué conexiones puedes hacer entre tu solución y los coeficientes que corresponden a las potencias más altas de x en el numerador y el denominador?

H. Determina el límite, $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-6x+1}{4-2x^2} =$ ________. ¿Hacia dónde crees que tenderá la función cuando x se acerca al infinito negativo? Utiliza tu calculadora para encontrar $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-6x+1}{4-2x^2}$

Seguimiento:

1. ¿Qué generalizaciones puedes hacer sobre los límites en las funciones racionales cuando el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio en el denominador?

2. ¿Qué generalizaciones puedes hacer sobre los límites en funciones racionales cuando el grado del polinomio en el numerador es mayor que el grado del polinomio en el denominador?

3. ¿Y cuando el grado en el numerador y el denominador son iguales?

4. ¿Crees que esto es cierto para todas las funciones racionales? Explica.

5. En tus propias palabras, explica en qué se parecen los límites hacia el infinito en las funciones racionales y el comportamiento final de las funciones racionales.